Einführung in die numerische Mathematik — WS 2009/10

Steffen Börm, Jens Burmeister — Do., d. 10.12.2009

T17.) (Lagrange-Polynome und Monome)

Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien $n+1$ Interpolationspunkte

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \; .$$

Beweisen Sie, dass für die Lagrange-Polynome $\ell_{in}(x)$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_{in}(0)\; x_i^k = \begin{cases} 1 & \text{für } \; k = 0 \; , \\ 0 & \text{für } \; k = 1, \ldots, n \; , \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & \text{für } \; k = n+1 \; . \end{cases}$$

T18.) (Vandermondesche Matrix)

Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Zu gegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ist die Vandermondesche Matrix $V := V(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ elementweise definiert durch

$$V_{i,j} = x_i^j \quad \text{für } i, j \in \{0, 1, \ldots, n\} \; .$$

Zeigen Sie, dass V regulär ist, indem Sie beweisen: $\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

T19.) (Approximationen der zweiten Ableitung durch eine dividierte Differenz)

Sei x aus dem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$. Schrittweiten $0 < h_l \in \mathbb{R}$ und $0 < h_r \in \mathbb{R}$ seien so gewählt, daß $x - h_l, x + h_r \in (a, b)$.
Sei $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $2-$mal stetig differenzierbare Funktion; d.h. $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass sich eine geeignete Newtonsche dividierte Differenz als Linearkombination von Funktionsauswertungen

$$D_h u(x) := \alpha_l u(x - h_l) + \alpha_c u(x) + \alpha_r u(x - h_r))$$

interpretieren läßt. Geben Sie die Koeffizienten α_l, α_c und α_r an.
Weisen Sie nach, dass $D_h u(x)$ eine Approximation der zweiten Ableitung u'' an der Stelle x darstellt, indem Sie den absoluten Fehler

$$|u''(x) - D_h u(x)|$$

abschätzen. Reicht die Voraussetzung $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ aus ?

Abgabe: Die theoretischen Aufgaben **(T)** am Do., d. 17.12.2009 bis 16 Uhr in bzw. vor unserem Sekretariat R906 im 9. Stock des Uni-Hochhauses.