

T37.) (Simpsonregel und Extrapolation)

Zeigen Sie: Der Eintrag $T_{01}(0)$ des in T32b. entwickelten Extrapolationstableaus stimmt mit der Simpsonregel überein.

T38.) (Newton-Côtes-Formel für große m)

Sei $1 \leq m \in \mathbb{N}$.

- a. Zeigen Sie, dass sich die Gewichte $\omega_0, \dots, \omega_m$ der Newton-Côtes-Formeln zu äquidistanten Stützstellen x_0, \dots, x_m aus $[-1, 1]$ als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems ergeben:

$$\sum_{\nu=0}^m \omega_{\nu} x_{\nu}^k = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & k \text{ gerade,} \\ 0, & k \text{ ungerade.} \end{cases} \quad \text{für } k = 0, \dots, m.$$

- b. Lösen Sie das Gleichungssystem aus a. mit Hilfe Ihrer C-Programme für den Fall $m = 8$. Was fällt Ihnen auf? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

T39.) (Gewöhnliche Differentialgleichung und Fixpunktiteration)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t) \text{ für } t \in [0, 1], \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Die zugehörige Integralgleichung kann als Fixpunktgleichung im Banachraum $C([0, 1], \mathbb{R})$ interpretiert und mit Hilfe einer Fixpunktiteration gelöst werden.

Leiten Sie für das gegebene Anfangswertproblem und die Startiterierte $y^{(0)}(t) = 1$ eine Darstellung der k -ten Iterierten $y^{(k)}(t)$ her (Beweis durch vollständige Induktion). Interpretieren Sie das Ergebnis.

T40.) (Stabilitätsfunktion und Konsistenzordnung)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= \alpha y(t) \text{ für } t \in [0, 1], \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

dessen exakte Lösung Ihnen bekannt ist.

- a. Bestimmen Sie für das explizite Euler-Verfahren, das Runge-Verfahren und das Heun-Verfahren eine Polynomfunktion g , welche folgende Gleichung erfüllt:

$$\tilde{y}(t+h; t, x) = g(\alpha h)x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}_{>0}, t \in [0, 1-h].$$

Solch eine Funktion g nennt man Stabilitätsfunktion. Allgemein lässt sich zeigen, dass für die gegebene Differentialgleichung solch eine Polynomfunktion g für jedes explizite Runge-Kutta-Verfahren existiert. (Dieses ist hier nicht zu zeigen und darf in b. als bekannt vorausgesetzt werden.)

- b. Zeigen Sie: Die Konsistenzordnung eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens für die hier gegebene Differentialgleichung ist höchstens der Grad der Stabilitätsfunktion g .

Abgabe: Die theoretischen Aufgaben (**T**) am Do., d. 2.2.2012 bis 14 Uhr in bzw. vor unserem Sekretariat R906 im 9. Stock des Uni-Hochhauses.