CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
A. Srivastav, R. Berghammer, B. Langfeld

Mathematik A

Wintersemester 2009/10 — Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Übung 8. 1. 2010

Extraserie

1. Präsenzaufgabe. Belegen Sie anhand entsprechender Gegenbeispiele, daß die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ und $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ nicht injektiv sind.

$$\text{(a)} \quad f(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad \text{(b)} \quad g(s) = \sum_{i=1}^{|s|} s_i \qquad \text{(c)} \quad h(X) = \min X$$

Dabei wird in (c) durch $\min X$ das kleinste Element der nichtleeren Menge X von natürlichen Zahlen bezeichnet.

2. Präsenzaufgabe. Es sei A eine nichtleere Menge und $a \in A$ fest gewählt. Beweisen Sie, daß die Funktion

$$f : A^* \to A^* \qquad f(s) = a : s$$

injektiv ist, indem Sie eine Linksinverse von f angeben, d.h. eine Funktion $g : A^* \to A^*$ mit $g(f(s)) = s$ für alle $s \in A^*$ (vergleiche Serie 8, Aufgabe 3 (a)).

3. Präsenzaufgabe. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erfülle für alle $x, y \in \mathbb{N}$ die folgende Bedingung:

$$f(x) = y \iff y^2 \leq x < (y+1)^2$$

Beweisen Sie, daß die Funktion f surjektiv ist, indem Sie eine Rechtsinverse von f angeben, d.h. eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(g(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (vergleiche Serie 8, Aufgabe 3 (b)).

4. Präsenzaufgabe. Die Funktion $rev : A^* \to A^*$ zum Revertieren von linearen Listen über einer Menge A kann induktiv wie folgt beschrieben werden:

$$rev(()) = () \qquad rev(a : s) = rev(s) \mathbin{\&} (a)$$

Beweisen Sie, daß rev bijektiv ist. Überlegen Sie sich dazu zuerst, wie die Inverse rev^{-1} von rev aussieht und zeigen Sie dann durch Induktion über den Aufbau der linearen Listen aus der leeren Liste durch Anfügen von Elementen von links, daß Ihre Vermutung korrekt ist.