CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
A. Srivastav, R. Berghammer, B. Langfeld

Mathematik A

Wintersemester 2009/10 | Bearbeitungszeit: 90 Minuten
16. 2. 2010

Klausur

1. Aufgabe (2+2+2 = 6 Punkte). Es sei $A := \{0, 1\}$. Wir betrachten die folgenden zwei Mengen:

$$X := \{s \in A^+ \mid \text{first}(s) = 0 \land |s| = 3\} \qquad Y := \{s \in A^* \mid \exists\, t \in A^* : s \,\&\, t = (0, 1, 1)\}$$

Geben Sie die Mengen $X \cup Y, X \cap Y$ und $X \setminus Y$ explizit an, d.h. durch die in Mengenklammern eingeschlossene Aufzählung ihrer Elemente.

2. Aufgabe (5+1+1 = 7 Punkte). Es seien a, b und c beliebige Aussagevariablen.

(a) Beweisen Sie durch logische Umformungen, daß die drei Formeln

$$a \land b \Rightarrow c \qquad a \Rightarrow \neg b \lor c \qquad \neg(a \land b \land \neg c)$$

äquivalent sind. Geben Sie dabei zu den einzelnen Rechenschritten die verwendeten Regeln entweder explizit oder in Form von Hinweisen (z.B. „de Morgan” oder „Distributivgesetz“) an.

(b) Geben Sie Werte für a, b und c an, für die die Formeln von (a) wahr werden.

(c) Geben Sie Werte für a, b und c an, für die die Formeln von (a) falsch werden.

3. Aufgabe (4+4 = 8 Punkte). Es sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge. Weiterhin seien $x, y \in A$ beliebig vorgegeben. Zeigen Sie, daß $x \leq y$ genau dann gilt, wenn für alle $z \in A$ aus $z \leq x$ folgt $z \leq y$.

4. Aufgabe (5+3 = 8 Punkte). Die Funktion $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ sei durch $f(n) = 2\binom{n}{2}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, daß f injektiv ist.

(b) Begründen Sie, daß f nicht surjektiv ist.

5. Aufgabe (3+6 = 9 Punkte). Es sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$. Beweisen Sie

(a) $\chi(G) \geq 2$ (b) $\chi(G) \leq 2$

(d.h. die Gleichheit $\chi(G) = 2$).

6. Aufgabe (2+5+5 = 12 Punkte). Es sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ gegeben, so daß für alle $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft

$$f(x) = y \iff 2^y \leq x < 2^{y+1}$$

gilt. Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die folgenden drei Eigenschaften:

(a) Gilt $x = 1$, so folgt $f(x) = 0$.

(b) Gilt $x > 1$ und ist x gerade, so folgt $f(x) = f(\frac{x}{2}) + 1$.

(c) Gilt $x > 1$ und ist x ungerade, so folgt $f(x) = f(\frac{x-1}{2}) + 1$.