CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
A. Srivastav, R. Berghammer, B. Langfeld

Mathematik A

Wintersemester 2009/10 — Bearbeitungszeit: 90 Minuten
6. 4. 2010

Wiederholungsklausur

1. Aufgabe (2+2+1+1+1 = 7 Punkte). Wir betrachten die folgenden zwei Mengen:

$$X := \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \leq 10\} \qquad Y := \{y \in \mathbb{N} \mid \exists\, z \in \mathbb{N} : y = z^2 \wedge z \leq 5\}$$

Geben Sie die beiden Mengen X und Y sowie $X \cup Y$, $X \cap Y$ und $X \setminus Y$ explizit an, d.h. durch die in Mengenklammern eingeschlossene Aufzählung ihrer Elemente.

2. Aufgabe (2+5 = 7 Punkte). Die n-te Potenz $f^n : A \to A$ einer Funktion $f : A \to A$ ist erklärt durch $f^0 := id_A$ (mit id_A als identische Funktion auf A) und $f^{n+1} := f \circ f^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie (durch Induktion nach m), daß $f^m \circ f^n = f^{m+n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. Aufgabe (3+3+3 = 9 Punkte). Es seien a, b und c beliebige Aussagevariablen.

(a) Beweisen Sie durch logische Umformungen, daß die Formeln $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ und $b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ äquivalent sind. Geben Sie dabei zu den einzelnen Rechenschritten die verwendeten Regeln entweder explizit oder in Form von Hinweisen an.

(b) Stellen Sie alle möglichen Werte von a, b und c und die sich daraus ergebenden Werte der Formel $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ tabellarisch dar.

(c) Leiten Sie aus der Tabelle von (b) eine zu $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ äquivalente Formel in disjunktiver Normalform her.

4. Aufgabe (2+2+5 = 9 Punkte). Die beiden Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien durch $f(x) = 2x + 2$ und $g(x) = x^2$ definiert.

(a) Stellen Sie die Werte $f(n)$ und $g(n)$ für alle $n \leq 5$ tabellarisch dar.

(b) Bestimmen Sie anhand der Tabelle von (a) die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) < g(n)$.

(c) Es sei n_0 das Resultat von (b). Zeigen Sie $f(n_0 + k) < g(n_0 + k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

5. Aufgabe (4+5 = 9 Punkte). Zu einer gegebenen bijektiven Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 2 + 3\, f(x)$. Zeigen Sie:

(a) g ist injektiv.

(b) g ist surjektiv.

6. Aufgabe (4+5 = 9 Punkte). Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine nichtleere Teilmenge C von V heißt eine *Clique*, falls für alle $u, v \in C$ gilt: $u = v$ oder $\{u, v\} \in E$.

(a) Wie viele Cliquen C mit $|C| = 2$ besitzt der Graph G, wenn er ein Baum ist (mit Begründung)?

(b) Beweisen Sie: Definiert man die *Cliquenzahl* von G durch

$$\omega(G) := \max\{|C| \mid C \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\} \text{ und } C \text{ ist Clique}\},$$

so gilt für diese Zahl und die chromatische Zahl $\chi(G)$ von G die Abschätzung $\omega(G) \leq \chi(G)$.