Aufgabe 1

$X = \{0, 1, 2, 3\}$ (2)

$Y = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ (2)

$X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 9, 16, 25\}$ (1)

$X \cap Y = \{0, 1\}$ (1)

$X \setminus Y = \{2, 3\}$ (1)

7

Aufgabe 2

Definiere $A(m)$ als $\forall n \in \mathbb{N} : f^m \circ f^n = f^{m+n}$ und beweise $\forall m \in \mathbb{N} : A(m)$ durch Induktion.

IB $m = 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt, nach Def. von f^m,

$$f^0 \circ f^n = id_A \circ f^n = f^n = f^{0+n}$$ (2)

IS $m \mapsto m+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{m+1} \circ f^n &= (f \circ f^m) \circ f^n && \text{Def } f^m \\ &= f \circ (f^m \circ f^n) && \circ \text{ assoz.} \\ &= f \circ f^{m+n} && \text{Ind Hyp } A(m) \\ &= f^{m+n+1} && \text{Def } f^m \\ &= f^{(m+1)+n} && \text{Eig. } + \end{aligned}$$

(5)

7

Aufgabe 3

(a)

$$
\begin{aligned}
a \Rightarrow (b \Rightarrow c) &\iff \neg a \vee (b \Rightarrow c) && \text{Auflös} \Rightarrow \\
&\iff \neg a \vee (\neg b \vee c) && \text{Auflös} \Rightarrow \\
&\iff (\neg a \vee \neg b) \vee c && \text{Assoz.} \\
&\iff (\neg b \vee \neg a) \vee c && \text{Komm.} \\
&\iff \neg b \vee (\neg a \vee c) && \text{Assoz.} \\
&\iff \neg b \vee (a \Rightarrow c) && \text{Aufl.} \Rightarrow \\
&\iff b \Rightarrow (a \Rightarrow c) && \text{Auflös} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

3

(b) Tabelle:

a	b	c	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$
F	F	F	W	W
F	F	W	W	W
F	W	F	F	W
F	W	W	W	W
W	F	F	W	W
W	F	W	W	W
W	W	F	F	F
W	W	W	W	W

3

(c) $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee$

$(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee$

$(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee$

$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee$

$(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee$

$(a \wedge \neg b \wedge c) \vee$

$(a \wedge b \wedge c)$

3

9

Aufgabe 4

(a) Tabelle:

n	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	2	4	6	8	10	12
$g(n)$	0	1	4	9	16	25

2

(b) $\min\{n \in \mathbb{N} : f(n) < g(n)\} = 3$ 2

(c) Es gilt: $n_0 = 3$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(n_0+k) &= 2(n_0+k)+2 && \text{Def } f \\
&= 2n_0 + 2k + 2 \\
&= 2n_0 + 2 + 2k \\
&= f(n_0) + 2k && \text{Def } f \\
&< g(n_0) + 2k && \text{Annahme an } n_0 \\
&= n_0^2 + 2k && \text{Def } g \\
&\leq n_0^2 + 2n_0k + k^2 && n_0 \geq 1,\ k^2 \geq 0 \\
&= (n_0+k)^2 \\
&= g(n_0+k) && \text{Def } g
\end{aligned}
$$

5

9

Aufgabe 5

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann

$$
\begin{aligned}
g(x) = g(y) &\iff 2 + 3f(x) = 2 + 3f(y) && \text{Def } g \\
&\iff 3f(x) = 3f(y) && \text{Subtr. 2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad f(x) = f(y)$ Div. 3

$\Rightarrow \quad x = y$ f inj.

(b) Sei $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt 4

$$
\begin{aligned}
g(x) = b \quad &\Leftrightarrow \quad 2 + 3f(x) = b \\
&\Leftrightarrow \quad 3f(x) = b - 2 \\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{b-2}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x = f^{-1}\left(\frac{b-2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Also gilt $g(f^{-1}(\frac{b-2}{3})) = 2 + 3f(f^{-1}(\frac{b-2}{3})) = 2 + 3\frac{b-2}{3} = b$

5

9

Aufgabe 6

(a) Genau jede Teilmenge $\{v, w\} \subseteq V$ mit $\{v, w\} \in E$ ist eine Clique der Größe 2. Wäre $\{v, w\} \subseteq V$ mit $v \neq w$ und $\{v, w\} \notin E$, dann gilt weder $v = w$ noch $\{v, w\} \in E$. Also sind dies keine Cliquen.

Ein Baum erfüllt $|E| = |V| - 1$, also gibt es $|V| - 1$ Cliquen der Größe 2. 4

(b) Jede Clique C mit $|C| = n$ muß mit n Farben gefärbt werden. Also gilt $|C| \leq \chi(G)$ für alle Cliquen und somit auch für eine größte Clique. Dies zeigt

$$\omega(G) = \max\{|C| \mid C \neq \emptyset \text{ Clique}\} \leq \chi(G).$$ 5

9