Aufgabe 1

$X = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$

$Y = \{(), (0), (0,1), (0,1,1)\}$

$X \cup Y = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (), (0), (0,1)\}$ 2

$X \cap Y = \{(0,1,1)\}$ 2

$X \setminus Y = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ 2

6

Aufgabe 2

(a)

$a \land b \Rightarrow c$

$\Leftrightarrow \neg(a \land b) \lor c$ — $X \Rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \lor Y$

$\Leftrightarrow \neg a \lor \neg b \lor c$ — de Morgan

$\Leftrightarrow a \Rightarrow \neg b \lor c$ — $X \Rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \lor Y$

2,5

$\neg(a \land b \land \neg c)$

$\Leftrightarrow \neg a \lor \neg b \lor \neg\neg c$ — de Morgan

$\Leftrightarrow \neg a \lor \neg b \lor c$ — $\neg\neg X \Leftrightarrow X$

$\Leftrightarrow a \Rightarrow \neg b \lor c$ — $X \Rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \lor Y$

2,5

(b) Wähle $a = W$, $b = W$ und $c = W$, dann wird $a \land b \Rightarrow c$ zu $W \land W \Rightarrow W$, also zu $W \Rightarrow W$ und dies ist W. 1

(c) Wähle $a = W$, $b = W$ und $c = F$, dann wird $a \land b \Rightarrow c$ zu $W \land W \Rightarrow F$, also zu $W \Rightarrow F$ und dies ist F 1

7

Aufgabe 3

Seien $x, y \in A$ beliebig.

„$\Rightarrow$" Es gelte $x \leq y$. Sei $z \in A$ mit $z \leq x$. (1) Wegen $x \leq y$ (1) und der Transitivität (1) von $\leq$ gilt dann $z \leq y$. (1)

„$\Leftarrow$" Es gelte $z \leq x \Rightarrow z \leq y$ für alle $z \in A$. Mit der Wahl $z := x$ (1) gilt also $x \leq x \Rightarrow$ (1) $x \leq y$. Da $x \leq x$ wahr ist (Reflexivität (1) von $\leq$), ist also auch $x \leq y$ wahr. (1)

8

Lösung Aufgabe 4

(a) $f(n) = 2 \cdot \binom{n}{2} = 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n$. Nun seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
m \neq n &\Rightarrow m + n \neq 1 \qquad \text{da } m, n \neq 0 \\
&\Leftrightarrow m + n \neq \frac{m-n}{m-n} \\
&\Leftrightarrow (m-n)(m+n) \neq m - n \\
&\Leftrightarrow m^2 - n^2 \neq m - n \\
&\Leftrightarrow m^2 - m \neq n^2 - n \\
&\Leftrightarrow f(m) \neq f(n)
\end{aligned}
$$

(4)

(b) Da $2 \cdot \binom{m}{2}$ gerade ist, kann z.B. $f(x) = 3$ für kein $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gelten.

(4)

8

Lösung Aufgabe 5

(a) Da G mindestens eine Kante $\{x,y\}$ besitzt (1) und x eine andere Farbe als y haben muß, (1) gilt $\chi(G) \geq 2$. (1)

(b) Induktion nach $|V| = n$. (1)

IB: $n = 2$. Hier gilt offensichtlich $\chi(G) = 2$. (1)

IS: $n \mapsto n+1$. Es gelte $|V| = n+1$. Sei $\{x,y\} \in E$, so daß y den Knoten x als einzigen Nachbarn habe. Sei $G' = (V', E')$, mit $V' := V \setminus \{y\}$ und $E' := E \setminus \{\{x,y\}\}$ (1)

Nach der Induktionshypothese gilt $\chi(G') = 2$ (1), denn auch G' ist ein Baum. Sei $f': V' \to \{1,2\}$ eine Färbung von G' mit $f'(x) = 1$. Definiere $f: V \to \{1,2\}$ durch $f(v) = f'(v)$ für $v \in V'$ und $f(y) = 2$. (1) Dann ist auch f eine Färbung von G. Sie ist auch minimal, da $f(x) \neq f(y)$ gelten muß. Also gilt $\chi(G) \leq 2$ (1)

9

Lösung Aufgabe 6

Sei $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig

(a) Sei $x = 1$. Dann gilt

$$f(x) = 0 \iff 2^0 \leq 1 < 2^1 \qquad \text{Eig. } f$$
$$\iff 1 \leq 1 < 2$$

Also ist $f(x) = 0$ wahr, da $1 \leq 1 < 2$ wahr ist. 2

(b) Sei $x > 1$ und gerade. Wegen $2 \leq x < 2^{f(x)+1}$ folgt $2 < 2^{f(x)+1}$, also $1 < f(x)+1$, also $f(x) \neq 0$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x) &\iff 2^{f(x)} \leq x < 2^{f(x)+1} && \text{Eig. } f \\
&\iff \frac{2^{f(x)}}{2} \leq \frac{x}{2} < \frac{2^{f(x)+1}}{2} && \text{Division} \\
&\iff 2^{f(x)-1} \leq \frac{x}{2} < 2^{f(x)} && \text{Potenzges.} \\
&\iff f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - 1 && \text{Eig. } f \\
&\iff f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1 && \text{Arith.}
\end{aligned}$$

5

(c) Sei $x > 1$ und ungerade. Hier gilt auch $2 < 2^{f(x)+1}$, also auch $f(x) \neq 0$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x) &\iff 2^{f(x)} \leq x < 2^{f(x)+1} && \text{Eig. } f \\
&\iff 2^{f(x)} \leq x-1 < 2^{f(x)+1} && x \text{ ungerade} \\
&\iff \frac{2^{f(x)}}{2} \leq \frac{x-1}{2} < \frac{2^{f(x)+1}}{2} && \text{Division} \\
&\iff 2^{f(x)-1} \leq \frac{x-1}{2} < 2^{f(x)} && \text{Potenzges.} \\
&\iff f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x) - 1 && \text{Eig. } f \\
&\iff f(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 && \text{Arithmetik}
\end{aligned}$$

5

12