CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
A. Srivastav, R. Berghammer, B. Langfeld

Mathematik A

Wintersemester 2009/10 — Stoff bis zu den Weihnachtsferien
11. 1. 2010

Probeklausur

1. Aufgabe (3+3 Punkte). Geben Sie die folgenden Mengen explizit an, d.h. durch die in Mengenklammern eingeschlossene Aufzählung ihrer Elemente.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 50 \wedge \exists\, y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$

(b) $B = \{X \in \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \mid a \in X \wedge b \notin X\}$

2. Aufgabe (3+4 Punkte). Es seien a, b und c beliebige Aussagevariablen.

(a) Zeigen Sie durch eine Überprüfung aller möglichen Werte von a und b, daß die Formel

$$(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$$

immer wahr ist. Stellen Sie dazu alle Werte von a und b und die entsprechenden Werte von $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$ und der Teilformeln $a \Rightarrow b$ und $a \wedge (a \Rightarrow b)$ in Form einer Tabelle dar.

(b) Beweisen Sie durch logische Umformungen, daß die folgenden zwei Formeln äquivalent sind.

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \qquad (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$$

Geben Sie zu den einzelnen Rechenschritten jeweils die verwendete Regel explizit oder in Form eines Hinweises (z.B. „de Morgan Regel“) an.

3. Aufgabe (2+2+5 Punkte). Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann heißt n durch m *teilbar* oder m ein *Teiler* von n, falls es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $mx = n$ gibt.

(a) Welche natürlichen Zahlen sind Teiler von 0 (mit Begründung)?

(b) Welche natürlichen Zahlen sind durch 1 teilbar (mit Begründung)?

(c) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, daß $3^{n+1} - 1$ durch 2 teilbar ist.

4. Aufgabe (7 Punkte). Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = ax + b$ definiert. Zeigen Sie, daß f bijektiv ist, indem Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angeben, welche die Umkehrfunktion zu f ist, also für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichungen $f(g(x)) = x$ und $g(f(x)) = x$ erfüllt. (Diese Gleichungen sind zu beweisen!)

5. Aufgabe (2+5 Punkte). Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ in eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt *echt absteigend*, falls $f(n) > f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(a) Geben Sie eine echt absteigende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an (mit Begründung).

(b) Zeigen Sie durch Widerspruch, daß es keine echt absteigende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie bei (b), daß jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element besitzt.