CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
A. Srivastav, R. Berghammer, B. Langfeld

Mathematik A

Wintersemester 2009/10 — Elemente der Graphentheorie
Abgabe 10. 2. 2010

Serie 12

1. Präsenzaufgabe. Zu einer natürlichen Zahl $n \neq 0$ ist der Hyperwürfel $Q_n = (V_n, E_n)$ definiert als derjenige Graph, dessen Knotenmenge V_n gleich $\{0,1\}^n$ ist und dessen Kantenmenge E_n aus allen Mengen $\{s,t\}$ besteht, so daß sich die n-Tupel s und t in genau einer Komponente unterscheiden.

(a) Spezifizieren Sie durch eine Formel, daß sich $s, t \in \{0,1\}^n$ in genau einer Komponente unterscheiden.

(b) Zeichnen Sie die Hyperwürfel Q_1, Q_2 und Q_3 und bestimmen Sie anhand der Zeichnungen für alle Knoten der Hyperwürfel Q_1, Q_2 und Q_3 die Knotengrade und die Nachbarnmengen.

2. Präsenzaufgabe. Wir betrachten wiederum Hyperwürfel wie in Präsenzaufgabe 1 eingeführt.

(a) Zeigen Sie anhand der Zeichnungen von Präsenzaufgabe 1, daß die Hyperwürfel Q_1, Q_2 und Q_3 bipartit sind.

(b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \neq 0$, daß der Hyperwürfel Q_n bipartit ist, indem Sie eine Partition von V_n in zwei Mengen A und B angeben und nachweisen, daß für alle Kanten $\{s,t\} \in E_n$ entweder $s \in A$ und $t \in B$ oder $s \in B$ und $t \in A$ gilt.

3. Präsenzaufgabe. Beweisen Sie für alle Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$: Es gibt zwei Knoten $v, w \in V$ mit $v \neq w$ und $d_G(v) = d_G(w)$.

4. Hausaufgabe (4 Punkte). Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \neq 0$. Wieviele Knoten bzw. Kanten besitzt der Hyperwürfel $Q_n = (V_n, E_n)$ (mit Begründung)?

5. Hausaufgabe (4 Punkte). Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Menge $U \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in U$ gilt $\{u, v\} \notin E$. Zeigen Sie: Definiert man die Unabhängigkeitszahl von G durch

$$\alpha(G) := \max\{|U| \mid U \subseteq V \text{ und } U \text{ unabhängig}\},$$

so gilt für diese Zahl und die chromatische Zahl $\chi(G)$ von G die Abschätzung

$$\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \chi(G).$$

Hinweis: Farbklassen sind unabhängig.

6. Hausaufgabe (4 Punkte). Beweisen Sie, daß für alle Graphen $G = (V, E)$ die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent sind.

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist zusammenhängend und für alle Kanten $e \in E$ ist $G \setminus e$ nicht zusammenhängend.