Übungen zur Mathematik für Geowissenschaftler II
Sommersemester 2014

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
M. Hauptmann

Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X eine auf $\{1, \ldots, n\}$ Laplace-verteilte Zufallsgröße, i.e., $P(X = k) = 1/n$ für $k = 1, \ldots, n$.

1. Zeigen Sie, dass gilt:
$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$
Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$.

2. Sie haben fünf Würfel in Form der platonischen Körper, d.h. einen Tetraeder (4-seitig), einen Kubus (6-seitig), einen Oktaeder (8-seitig), einen Dodekaeder (12-seitig) und einen Ikosaeder (20-seitig). Die Seiten dieser Würfel seien mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ durchnummeriert. Sie werfen jeden Würfel einmal. Für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sei X_i die Zufallsvariable „Augenzahl des i-ten Würfels“. Wie groß sind nun $E(X_i)$ und $\mathrm{Var}(X_i)$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Radioaktiver Zerfall: Sei N_0 die Zahl instabiler Atomkerne zum Zeitpunkt $t = 0$. Für $t > 0$ sei N_t die Anzahl der Kerne, die zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind. Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls besagt, dass es einen Parameter $\lambda > 0$ gibt (der von der Art des Kernzerfalls und den spezifischen Kernen abhängt), so dass $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$. Sei T die *Halbwertszeit* des radioaktiven Zerfalls, i.e., $N_T = N_0/2$. (Wie lässt sich T durch λ ausdrücken?) Nun soll die Zerfallszeit X eines unter den N_0 Atomkernen zufällig ausgewählten Atomkerns modelliert werden.

1. Wie groß ist $P(X \in [T, \infty))$?
2. Wie groß ist $P(X \in [2T, \infty))$?
3. Wie groß ist $P(X \in [3T, \infty))$?
4. Wie groß ist $P(X \in [t, \infty))$ für allgemeines $t > 0$?
5. Wie groß ist $P(X \in [s, t))$ für $s, t > 0$ mit $s \leq t$?

Die Verteilung von X heißt *Exponentialverteilung zum Parameter* λ.

Aufgabe 3 (Freiwillige Aufgabe; 4 Zusatzpunkte)
Sei $p \in (0, 1]$. Eine Zufallsvariable X mit Werten in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ heißt *geometrisch verteilt zum Parameter* p, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(X =$

$n) = p(1-p)^{n-1}$. Zeigen Sie: es gilt $E(X) = 1/p$.
Hinweis: Für eine Zufallsvariable Y mit Werten in $\mathbb{N}$ ist der Erwartungswert $E(Y)$ über $E(Y) := \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y=k)$ definiert. Ferner gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ für alle $x \in (0,1)$ (Formel für die *geometrische Reihe*). Der zu berechnende Erwartungswert lässt sich nun mit Hilfe der Formel und mit dem Rechentrick „Differentiation unter dem Summenzeichen" (ähnlich wie bei der Berechnung der Summe in Aufgabe 1.2 (b)) bestimmen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Schokoladenriegel der Marke „NUMBGUM" enthalten in diesem Sommer jeweils eines von 11 Sammelbildern der Fußballspieler der „WM-Traumelf der Top-Top-Top-Stars!". Die verschiedenen Bilder kommen dabei mit der gleichen relativen Häufigkeit vor. Was ist die erwartete Anzahl von Schokoriegeln, die Sie kaufen müssen, um die komplette WM-Traumelf zusammen zu haben?
Anleitung: Für $i = 1, 2, \ldots, 11$ sei die Zufallsvariable X_i die Anzahl der Riegel, die Sie kaufen, bis Sie i verschiedene Sammelbilder zusammen zu haben. Ferner sei $X_0 := 0$. Überlegen Sie sich, dass die Zufallsvariable $Y_i := X_i - X_{i-1}$ geometrisch verteilt zu einem Parameter $p_i \in (0, 1]$ ist. Nutzen Sie die Behauptung aus Aufgabe 3 (auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben oder nicht beweisen konnten) und die Additivität des Erwartungswerts, also Satz 4.5(i).

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei X_n Laplace-verteilt auf $\{-n, \ldots, 0, \ldots, n\}$. Für die Werte $n = 10, 100, 1000$ und 10.000 vergleiche man $P(|X_n| \geq n/2)$ und $P(|X_n| \geq n/10)$ mit den Abschätzungen, die man für diese Wahrscheinlichkeiten aus der Tschebyscheff-Ungleichung erhält.

Abgabe bis Mittwoch, den 25.6.2014, 12 Uhr im Schrein (1. Stock).