Übungen zur Mathematik für Ingenieure III

Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 5

Aufgabe 1 ($1 + 1 + 1 + 1 = 4$ **Punkte)**
Verifizieren oder falsifizieren Sie die folgenden Aussagen:

1. Seien γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und γ^- die in Gegenrichtung verlaufende Kurve. Dann gilt für deren Summe von Kurven: $\gamma + \gamma^- = 0$.

2. Der Tangentialvektoren der Kurven γ und γ^- sind in jedem Punkt gleich.

3. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare, stetig differenzierbare Funktion und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan-messbare Menge. Dann gilt für die geometrischen Schwerpunkte von M und $\varphi(M)$ die Identität $\varphi(S_M) = S_{\varphi(M)}$.

4. Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

Aufgabe 2 ($2 + 2 = 4$ **Punkte)**
Seien $a, h > 0$ reelle Zahlen, und seien

$$\gamma_1 : [0, h] \to \mathbb{R}^3 \,,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t), at)^T \,,$$

und

$$\gamma_2 : [0, h] \to \mathbb{R}^3 \,,\ t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t), at^2)^T .$$

Berechne Sie die Längen $\ell(\gamma_1)$ und $\ell(\gamma_2)$.

Aufgabe 3 ($2 + 2 = 4$ **Punkte)**

1. Skizzieren Sie die drei Kurven

$$\gamma_1 : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2 \,,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T \,,$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \,,\ t \mapsto (1 - t \,,\ t)^T$$

und

$$\gamma_3 : [0, 2] \to \mathbb{R}^2 \,,\ t \mapsto \begin{cases} (1 - t, 0)^T, & \text{falls } 0 \le t \le 1, \\ (0, t - 1)^T, & \text{falls } 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y$. Berechnen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_i} f \, ds$.

Aufgabe 4 $(2 + 2 = 4$ **Punkte)**

1. Sei $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x\}$. Berechnen Sie das Integral
$$\int_{M_1} \frac{x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^5} d(x, y).$$

2. Sei $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Berechnen Sie das Integral
$$\int_{M_2} e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \frac{1}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2} d(x, y).$$

Hinweis: Hyperbolische Koordinaten (vgl. Skript, letztes Beispiel aus Vorlesung 8), Polarkoordinaten.

Aufgabe 5 **($*$-Aufgabe;** $2 + 2 = 4$ **Zusatzpunkte)**

1. Formulieren Sie den Satz von Fubini (Satz 1.3 der Vorlesung) für uneigentliche Riemann-Integrale.

2. Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz (Satz 1.9 der Vorlesung) für uneigentliche Riemann-Integrale.

Hinweis: In beiden Teilaufgaben sollen Sie die Voraussetzungen der ursprünglichen Sätze so anpassen, dass sich deren Aussagen auch auf uneigentliche Riemann-Integrale übertragen und sich mit Hilfe der ursprünglichen Sätze verifizieren lassen.

Abgabe: Montag, den 08.12.2014, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.