Übungen zur Mathematik für Ingenieure III
Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 6

Aufgabe 1 ($2+2=4$ **Punkte**)
Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2\,,\ t \mapsto (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t))^T.$$

1. Berechne Sie die Länge $\ell(\gamma)$ und geben Sie γ in Polarkoordinaten an.

2. Finden Sie die Parametrisierung δ von γ nach Bogenlänge und geben Sie auch δ in Polarkoordinaten an.

Aufgabe 2 (4 **Punkte**)
Die Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$\gamma_1(t) = (t^2, t)^T\,, \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} (-2t, 2t)^T & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (4t-3, 1)^T, & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $F(x,y) = (y^2, -xy)^T$.
Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die vektoriellen Kurvenintegrale $\int_{\gamma_i} F \cdot ds$.

Aufgabe 3 ($2+2=4$ **Punkte**)
Sei $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ die in Polarkoordinaten durch

$$r(t) = 4 - t^2 \quad \text{und} \quad \phi(t) = \ln(2+t)$$

gegebene Kurve.

1. Berechnen Sie die Länge $\ell(\gamma)$ von γ.

2. Sei $S := \{s\gamma(t) \ :\ -1 \leq t \leq 1\,,\, 0 \leq s \leq 1\}$ der durch γ beschriebene Sektor. Berechnen Sie die Fläche von S.

Aufgabe 4 (4 **Punkte**)
Seien $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ die in Zylinderkoordinaten durch

$$r(t) = ct \quad \phi(t) = 2nt \quad \text{und} \quad z(t) = t$$

gegebene Kurve. Wie sieht γ aus?
Sei F das Vektorfeld $F(x,y,z) = yze_1 + \sqrt{x^2+y^2}e_2 + e_3$. Schreiben Sie das Vektorfeld F in Zylinderkoordinaten, und berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot ds$.

Aufgabe 5 ($*$-Aufgabe; $2 + 2 = 4$ Zusatzpunkte)
In der Vorlesung haben wir für die Darstellung in Polarkoordinaten eine lokale Orthonormalbasis berechnet und mit deren Hilfe konkrete Formeln für skalare und vektorielle Kurvenintegrale in Polarkoordinaten hergeleitet.

1. Verifizieren Sie, dass die in der Vorlesung für Zylinder- und Kugelkoordinaten angegebenen Vektoren wirklich jeweils eine lokale Orthonormalbasis bilden.

2. Leiten Sie mit Hilfe dieser Orthonormalbasen konkrete Formeln für skalare und vektorielle Kurvenintegrale in Zylinder- und Kugelkoordinaten her.

Abgabe: Montag, den 15.12.2014, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.