Übungen zur Mathematik für Ingenieure III

Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Spaltenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Zeigen Sie, dass

$$\|a \times b\|^2 = \det(A^T A)$$

gilt. Wie lässt sich diese Beziehung für eine Definition des skalaren Flächenintegrals nutzen, die auch in Dimension $n \neq 3$ sinnvoll ist?

Aufgabe 2 ($1 + 1 + 2 = 4$ Punkte)

Seien $r, R > 0$, wobei $r < R/2$. Sei F die Kugelkappe

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,,\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq r^2\}.$$

1. Überlegen Sie sich, wie die Menge F aussieht.
2. Geben Sie eine Parametrisierung des Flächenstücks F an.
3. Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(F)$ von F und geben Sie das Verhältnis $A(F)/(\pi r^2)$ von $A(F)$ zur Fläche eines Kreises mit Radius r an.

Aufgabe 3 ($1 + 2 + 1 = 4$ Punkte)

Sei $\gamma : [a, b] \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$ eine geschlossene, stetig differenzierbare Kurve, die $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $a < t < b$ erfüllt. Sei F die Fläche im $\mathbb{R}^n$, die durch Rotation von γ um die z-Achse ensteht; dabei fassen wir $\gamma([a, b])$ als Teilmenge der $x - z$–Ebene im $\mathbb{R}^3$ auf.

1. Geben Sie eine Parametrisierung von F an.
2. Berechnen Sie die zur Parametrisierung gehörigen Tangential- und Normalenvektoren von F.
3. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Aufgabe 4 (4 **Punkte)**
Sei $r > 0$ und sei K der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius r in der $x-y$–Ebene des $\mathbb{R}^3$. Ferner sei P das Paraboloid

$$P := \{(x, y, r^2 - x^2 - y^2) \,|\, (x, y) \in K\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und F die geschlossene Fläche $F := K \cup P$, orientiert mit nach außen gerichteten Normalenvektoren. Ferner sei G das auf ganz $\mathbb{R}^3$ definierte Vektorfeld

$$G(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

Berechnen Sie die Flächenintegrale $\int_P G \cdot d\sigma$, $\int_K G \cdot d\sigma$ und $\oint_F G \cdot d\sigma$ einmal auf direktem Weg und einmal mit Hilfe des Gaußschen Divergenzsatzes.

Abgabe: Mittwoch, den 19.1.2015, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.