

Übungen zur Mathematik für Geowissenschaftler II

Sommersemester 2014

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch

Probeklausur

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

Sie haben 27 Murmeln und 10 Beutel. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Murmeln auf die Beutel zu verteilen, unter der Annahme, dass die Murmeln ...

1. ... unterscheidbar sind?
2. ... ununterscheidbar sind?
3. ... ununterscheidbar sind und in jedem Beutel mindestens zwei Murmeln liegen sollen?

Aufgabe 2 (1+1+4+4 Punkte)

In einer Urne liegen fünf rote und sieben grüne Kugeln. In der ersten Runde wird zufällig eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert und dann beiseite gelegt. In der zweiten Runde wird zufällig eine Kugel aus den verbleibenden Kugeln gezogen und ihre Farbe notiert.

1. Geben Sie einen sinnvollen Ergebnisraum Ω für dieses zweistufige Zufallsexperiment an.
2. Wie wahrscheinlich ist es, dass in der ersten Runde eine rote Kugel gezogen wird?
3. Wie wahrscheinlich ist es, dass in der zweiten Runde eine rote Kugel gezogen wird?
4. Sie erfahren, dass in der zweiten Runde eine grüne Kugel gezogen wurde. Wie wahrscheinlich ist es nun, dass in der ersten Runde eine rote Kugel gezogen wurde?

Aufgabe 3 (2 Punkte je Teilaufgabe)

Folgende Zahlen über den Personenverkehr in Deutschland veröffentlichte das Statistische Bundesamt (Destatis) 2010:

	Anteil an Wegen in %	Durchschnittliche Weglänge in km
Mot. Ind.	55	16
Eisenbahn	2	34
ÖSPV	9	8
Flugzeug	0,1	468
Fahrrad	9	3,4
Zu Fuß	24	1,4

(Hierbei ist „Mot. Ind.“ die Abkürzung für „Motorisierter Individualverkehr“ und „ÖSPV“ die Abkürzung für „Öffentlicher Straßenpersonenverkehr“.) Wir betrachten

$\Omega := \{\text{in Deutschland von einer beliebigen Person in 2010 zurückgelegte Wege}\}$

als Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten einen zufällig ausgewählten Weg in Ω .

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Weg mit der Eisenbahn oder mit dem ÖSPV zurückgelegt wurde.
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Weg nicht mit dem Fahrrad zurückgelegt wurde.
3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Weg zu Fuß zurückgelegt wurde unter der Annahme, dass der Weg nicht mit dem Auto und dem Fahrrad zurückgelegt wurde.
4. Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Zufallsvariable „Weglänge“, also $X(\text{Weg}) :=$ Länge des Wegs in Kilometern. Berechnen Sie aus den Angaben in der Tabelle den Erwartungswert von X , also die durchschnittliche Länge eines Wegs.
5. Begründen Sie nachvollziehbar, warum Sie in Aufgabenteil 4 den Erwartungswert $E(X)$ aus den Angaben in der Tabelle berechnen können, die Varianz $\text{Var}(X)$ hingegen im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 4 (2+3+2+3 Punkte)

Beim Wurf mit einer gezinkten Münze erscheinen die Seiten 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit $P(1) = 1/4$ und $P(0) = 3/4$. Die Münze wird $n = 50$ mal geworfen; die Ausgänge der Einzelexperimente werden als unabhängig angenommen. Sei X die Anzahl der Einsen in den 50 Würfeln.

1. Welche Verteilung besitzt X ?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $24 \leq X \leq 27$ gilt?
3. Wie groß sind $E(X)$ und $\sigma(X)$?
4. Sei Y (μ, σ) -normalverteilt mit $\mu = E(X)$ und $\sigma = \sigma(X)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $24 \leq Y \leq 27$ gilt?

(Hinweis: Wenn Sie die Werte von $E(X)$ und $\sigma(X)$ nicht berechnen konnten, verwenden Sie bitte in Aufgabenteil (4) statt dessen die Werte $\mu = 10$ und $\sigma = 3$.)

Aufgabe 5 (2 Punkte je Teilaufgabe)

Eine faire Münze mit Seiten 0, 1 und ein fairer 8-seitiger Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Sei $\Omega := \{(j, n) \mid j \in \{0, 1\}, n \in \{1, 2, \dots, 8\}\}$. Wir betrachten die Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$X(0, n) := n \quad \text{und} \quad X(1, n) := 2n$$

sowie

$$Y(0, n) := 2n \quad \text{und} \quad Y(1, n) := n$$

definiert sind. Ferner betrachten wir die Ereignisse $A := \{X = 2\}$ und $B := \{Y = 4\}$.

1. Geben Sie die Würfe in A und die in B explizit an.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$ und $P(B|A)$.
3. Sind A und B unabhängig? Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antworten.
4. Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.
5. Berechnen Sie $E(X - Y)$ und $\text{Var}(X - Y)$.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Zettel!

Erlaubte Hilfsmittel: Ein nicht-programmierbarer Taschenrechner und die angehängte Tabelle für die Verteilungsfunktion Φ der $(0, 1)$ -Normalverteilung.

Wenn Sie Ihre freiwillige Probeklausurbearbeitung korrigiert haben möchten, so reichen Sie sie möglichst bis Mittwoch, den 18.6.2014, 12 Uhr im Schrein (1. Stock), spätestens aber bis Freitag, den 20.6.2014 in Ihrer Übung ein.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

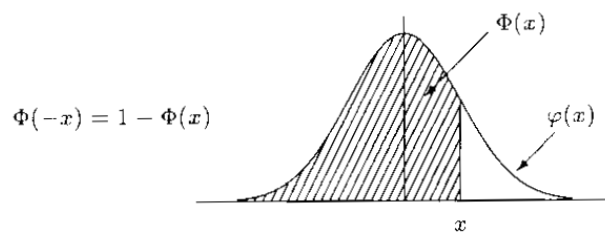


Tabelle II Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$. Ablesbeispiel:
 $\Phi(1,96) \approx 0,975$.