Übungen zur Mathematik für Geowissenschaftler II
Sommersemester 2014

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
M. Hauptmann

Blatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein fairer 10-seitiger Würfel wird 2000 mal nacheinander (unabhängig) geworfen. Die Zufallsvariable X sei die Augensumme der 2000 Würfe. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ von X. Bestimmen Sie zudem näherungsweise s mit $P(X \in [E(X) - s, E(X) + s]) = 0,95$. Welche Genauigkeit ist bei der Angabe von s sinnvoll?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{\text{volle Minuten zwischen } 15:06 \text{ und } 16:50 \text{ am 29. Juni 2014}\}$ als Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum gegeben. Wir bezeichnen mit $X(t)$ die Windrichtung am Kieler Leuchtturm zum Zeitpunkt $t \in \Omega$. Folgende Messungen liegen uns vor [1]:

Uhrzeit	Windrichtung in Grad
16:50	329
16:42	332
16:34	346
16:26	355
16:18	352
16:10	299
16:02	296
15:54	296
15:46	312
15:38	355
15:30	348
15:22	347
15:14	347
15:06	353

1. Schätzen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

2. Nehmen Sie an, dass die Standardabweichung von X mit der geschätzten übereinstimmt. Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung eine Mindestwahrscheinlichkeit an, mit der die Windgeschwindigkeit zu einem zufälligen Zeitpunkt $t \in \Omega$ höchstens 25 Grad vom Erwartungswert von X abweicht.

3. Wie hoch ist die relative Häufigkeit der Messwerte, die höchstens 25 Grad vom Mittelwert der Messwerte abweichen?

[1] Quelle: Geomar

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Diskutieren Sie für die folgenden Zufallsexperimente, ob Sie bei großem $N \in \mathbb{N}$ den zentralen Grenzwertsatz zur Verteilungsapproximation anwenden können:

1. Ein Roulette wird N mal gedreht. Für $n = 1, 2, \ldots, N$ setzen Sie beim n-ten Dreh einen Einsatz von 1 auf das Ereignis „rot" und interessieren sich für Ihren Gesamtgewinn nach N Runden.
2. Ein Roulette wird N mal gedreht. Für $n = 1, 2, \ldots, N$ setzen Sie beim n-ten Dreh einen Einsatz von n auf das Ereignis „rot" und interessieren sich für Ihren Gesamtgewinn nach N Runden.
3. Sie werfen jeweils nacheinander fünf verschiedene Würfel in Form der platonischen Körper (vgl. Aufg. 8.1). Dieses Experiment wiederholen Sie N mal und interessieren sich für die Summe der Augenzahlen der gesamten $5N$ Würfe.
4. Seien $a, b > 0$, X eine Zufallsvariable mit Werten im Intervall $(0, a)$, und $X_1, X_2, \ldots, X_N$ unabhängige Kopien von X. Sie interessieren sich für den Wert der Zufallsvariable $Y := b \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_N$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Nach einer Schätzung stürzen jährlich im Schnitt ca. 14 Meteoriten in das Gebiet von Deutschland[2]. Die Fläche von Kiel beträgt ca. $120km^2$; die Fläche von Deutschland beträgt ca. $360000km^2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 300 Jahren mindestens zwei Meteoriten Kiel erreichen?
Der Einfachheit wegen dürfen Sie annehmen, dass in jede $120km^2$-Region der Erde im Schnitt gleich viele Meteoriten pro Jahr herabstürzen und das Meteoritenabstürze unabhängig voneinander erfolgen.
(Hinweis: Überlegen Sie sich, wie viele Meteoriten innerhalb von 300 Jahren im Schnitt in das Gebiet von Kiel stürzen, und nutzen Sie die *Poisson-Verteilung* (s. Skript S. 53) mit entsprechendem Parameter $\lambda > 0$.)

Aufgabe 5 (Freiwillige Zusatzaufgabe; 4 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie, dass die *empirische Varianz* ein *erwartungstreuer Schätzer* für die Varianz ist.
Genauer: Seien (wie in der Vorlesung) X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$, $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Kopien von X und

$$\overline{X_n} := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

und

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\left((X_1 - \overline{X_n})^2 + (X_2 - \overline{X_n})^2 + \ldots + (X_n - \overline{X_n})^2\right).$$

Zeigen Sie unter Ausnutzung der Rechenregeln für Erwartungswerte, dass gilt: $E(S_n^2) = \mathrm{Var}(X)$.

Abgabe bis Mittwoch, den 9.7.2014, 12 Uhr im Schrein (1. Stock).

[2] Quelle: Wikipedia