

Übungen zur Mathematik für Geowissenschaftler II
Sommersemester 2014

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
M. Hauptmann

Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X eine auf $\{1, \dots, n\}$ Laplace-verteilte Zufallsgröße, i.e., $P(X = k) = 1/n$ für $k = 1, \dots, n$.

1. Zeigen Sie, dass gilt:

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Hinweis: $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$.

2. Sie haben fünf Würfel in Form der platonischen Körper, d.h. einen Tetraeder (4-seitig), einen Kubus (6-seitig), einen Oktaeder (8-seitig), einen Dodekaeder (12-seitig) und einen Ikosaeder (20-seitig). Die Seiten dieser Würfel seien mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots$ durchnummeriert. Sie werfen jeden Würfel einmal. Für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sei X_i die Zufallsvariable „Augenzahl des i -ten Würfels“. Wie groß sind nun $E(X_i)$ und $\text{Var}(X_i)$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Radioaktiver Zerfall: Sei N_0 die Zahl instabiler Atomkerne zum Zeitpunkt $t = 0$. Für $t > 0$ sei N_t die Anzahl der Kerne, die zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind. Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls besagt, dass es einen Parameter $\lambda > 0$ gibt (der von der Art des Kernzerfalls und den spezifischen Kernen abhängt), so dass $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$. Sei T die *Halbwertszeit* des radioaktiven Zerfalls, i.e., $N_T = N_0/2$. (Wie lässt sich T durch λ ausdrücken?) Nun soll die Zerfallszeit X eines unter den N_0 Atomkernen zufällig ausgewählten Atomkerns modelliert werden.

1. Wie groß ist $P(X \in [T, \infty))$?
2. Wie groß ist $P(X \in [2T, \infty))$?
3. Wie groß ist $P(X \in [3T, \infty))$?
4. Wie groß ist $P(X \in [t, \infty))$ für allgemeines $t > 0$?
5. Wie groß ist $P(X \in [s, t))$ für $s, t > 0$ mit $s \leq t$?

Die Verteilung von X heißt *Exponentialverteilung zum Parameter λ* .

Aufgabe 3 (Freiwillige Aufgabe; 4 Zusatzpunkte)

Sei $p \in (0, 1]$. Eine Zufallsvariable X mit Werten in den natürlichen Zahlen \mathbb{N} heißt *geometrisch verteilt zum Parameter p* , falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(X =$

$n) = p(1-p)^{n-1}$. Zeigen Sie: es gilt $E(X) = 1/p$.

Hinweis: Für eine Zufallsvariable Y mit Werten in \mathbb{N} ist der Erwartungswert $E(Y)$ über $E(Y) := \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y=k)$ definiert. Ferner gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ für alle $x \in (0,1)$ (Formel für die *geometrische Reihe*). Der zu berechnende Erwartungswert lässt sich nun mit Hilfe der Formel und mit dem Rechen-trick „Differentiation unter dem Summenzeichen“ (ähnlich wie bei der Berechnung der Summe in Aufgabe 1.2 (b)) bestimmen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Schokoladenriegel der Marke „NUMBGUM“ enthalten in diesem Sommer jeweils eines von 11 Sammelbildern der Fußballspieler der „WM-Traumelf der Top-Top-Top-Stars!“. Die verschiedenen Bilder kommen dabei mit der gleichen relativen Häufigkeit vor. Was ist die erwartete Anzahl von Schokoriegeln, die Sie kaufen müssen, um die komplette WM-Traumelf zusammen zu haben?

Anleitung: Für $i = 1, 2, \dots, 11$ sei die Zufallsvariable X_i die Anzahl der Riegel, die Sie kaufen, bis Sie i verschiedene Sammelbilder zusammen zu haben. Ferner sei $X_0 := 0$. Überlegen Sie sich, dass die Zufallsvariable $Y_i := X_i - X_{i-1}$ geometrisch verteilt zu einem Parameter $p_i \in (0,1]$ ist. Nutzen Sie die Behauptung aus Aufgabe 3 (auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben oder nicht beweisen konnten) und die Additivität des Erwartungswerts, also Satz 4.5(i).

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei X_n Laplace-verteilt auf $\{-n, \dots, 0, \dots, n\}$. Für die Werte $n = 10, 100, 1000$ und 10.000 vergleiche man $P(|X_n| \geq n/2)$ und $P(|X_n| \geq n/10)$ mit den Abschätzungen, die man für diese Wahrscheinlichkeiten aus der Tschebyscheff-Ungleichung erhält.

Abgabe bis Mittwoch, den 25.6.2014, 12 Uhr im Schrein (1. Stock).