Übungen zur Mathematik für Ingenieure III
Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 1

Aufgabe 1 ($2+1+1=4$ **Punkte**)
Berechnen Sie die folgenden zwei eigentlichen und das uneigentliche Riemann-Integral von Funktionen einer Veränderlichen:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\, dx$,
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$,
3. $\int_0^\infty \frac{x}{e^{\alpha x}}\, dx$ für $\alpha > 0$.

Aufgabe 2 ($2+2=4$ **Punkte**)
Berechnen Sie die folgenden zwei Riemann-Integrale von Funktionen in zwei Variablen:

1. $\int_Q (x^2 + e^y)\, d(x,y)$ für $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1\,, 0 \le y \le 2\}$,
2. $\int_E (x^4 y + 3)\, d(x,y)$ für $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1\,, x^2 \le y \le 1\}$.

Aufgabe 3 ($2+2=4$ **Punkte**)
1. Zeigen Sie, dass $D_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x_1 = x_2 \le 1\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Zeigen Sie, dass sogar $D_\infty := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x_1 = x_2 < \infty\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4 (4 **Punkte**)
Beweisen Sie die Aussagen (i), (ii) und (vi) des Satzes 1.1.

Aufgabe 5 ($*$-Aufgabe; $2 + 2 = 4$ Zusatzpunkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein nicht ausgeartetes Intervall. Sei $A \subseteq Q$ und $\chi_A : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $\chi_A(x) = 1$, wenn $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ sonst.

(a) Stellen Sie zu vorgegebener Zerlegung α von Q die Untersumme $\underline{S}(\chi_A; \alpha)$ und die Obersumme $\overline{S}(\chi_A; \alpha)$ auf.

(b) Betrachten Sie den Fall, das A selbst ein Intervall ist. Zeigen Sie, dass dann χ_A Riemann-integrierbar ist und $\int_Q \chi_A(x)\, dx = \mathrm{vol}(A)$ gilt.

Abgabe: Montag, den 10.11.2014, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.