Übungen zur Mathematik für Ingenieure III

Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 3

Aufgabe 1 ($1+1+1+1=4$ **Punkte**)
Verifizieren oder falsifizieren Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist wieder eine offene Menge.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
3. Seien $a, x, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$. Für jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die in allen Punkten $y \in [a, b] \setminus \{x\}$ stetig ist, existiert eine stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f|_{[a,b]\setminus\{x\}} = g|_{[a,b]\setminus\{x\}}$.
4. Die Funktion $\varphi : (-1, 1) \to (1, \sqrt{2})$, $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ ist eine Koordinatentransformation zwischen offenen Mengen.

Aufgabe 2 ($2+2=4$ **Punkte**)
Nutzen Sie das Cavalieri-Prinzip zur Lösung der folgenden Teilaufgaben:

1. Berechnen Sie das Volumen des Simplex
   $S := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y, z \geq 0\,, x + y + z \leq 1\big\}$.
2. Weisen Sie nach, dass sich das Volumen nicht ändert, wenn man den oberen Eckpunkt $(0, 0, 1)$ durch $(x, y, 1)$ mit beliebigen $x, y \in \mathbb{R}$ ersetzt.

Aufgabe 3 (4 **Punkte**)
Seien $0 < r < R$ reelle Zahlen und

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0, (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(R, 0)$ in der $x-z$-Ebene. Der Torus mit innerem Radius r und äußerem Radius R ist die Menge T, die durch Rotation von K um die z-Achse entsteht.
Beschreiben Sie T in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 4 (4 **Punkte**)
Der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\Delta f(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x), \quad x \in U,$$

für jede zweifach stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen.
Berechnen Sie Δ in Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Aufgabe 5 ($*$-Aufgabe; $2+2=4$ Zusatzpunkte)
Betrachte für $a, b, c > 0$ das Ellipsoid

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \leq 1 \right\}.$$

1. Berechnen Sie das Volumen von E.
2. Berechnen Sie den Schwerpunkt des unteren Halbellipsoids $E^- := \{(x, y, z) \in E \,:\, z \leq 0\}$.

Abgabe: Montag, den 24.11.2014, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.