Übungen zur Mathematik für Ingenieure III
Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 4

Aufgabe 1 ($1 + 1 + 1 + 1 = 4$ **Punkte)**
Verifizieren oder falsifizieren Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Menge $\{1/n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

2. Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix, und sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die durch $T(x) = Ax$ gegebene lineare Abbildung. Dann ist die Jacobi-Matrix von T in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gerade A.

3. Für invertierbare lineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt die Identität $\det(T^{-1}) = -\det(T)$.

4. Sei $A \subset \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ eine Jordan-messbare Teilmenge und D der Rotationskörper, der durch Rotation von A, aufgefaßt als Teilmenge der y-z-Ebene, um die z-Achse entsteht. Dann gilt für die z-Komponenten der geometrischen Schwerpunkte von D und A die Identität $S_{D,z} = S_{A,z}$.

Aufgabe 2 ($2 + 2 = 4$ **Punkte)**
Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, -x^2 \le y \le \min\{1 + x, 1 - x\}\}$.

1. Zeichnen Sie die Menge D und berechnen Sie deren Fläche.

2. Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt S_D von D.

Aufgabe 3 (4 **Punkte)**
Ein elektrischer Leiter besitze einen kreisringförmigen Querschnitt $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R^2 \le x^2 + y^2 \le 4R^2\}$ mit Innenradius $R > 0$ und Außenradius $2R$. Er wird in Längsrichtung von einem Strom mit der Stromdichte

$$\rho(x, y) = K \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \in Q, \quad K > 0 \quad \text{Konstante},$$

durchflossen. Berechnen Sie die Stromstärke $I = \int_Q \rho(x, y)\, d(x, y)$.

Aufgabe 4 ($1 + 3 = 4$ **Punkte)**
1. Sei $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |y| < x\}$. Geben Sie eine Ausschöpfung von U durch kompakte, Jordan-messbare Mengen an.

2. Berechnen Sie das uneigentlich Riemann-Integral

$$I := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d(x, y)}{1 + (x^2 + y^2)^2}. \tag{1}$$

Aufgabe 5 ($*$-Aufgabe; $2+2=4$ Zusatzpunkte)

1. Betrachten Sie eine Hohlkugel $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : r \leq x^2+y^2+z^2 \leq R\}$ für Radien $0 < r < R$. Die Massendichte ρ der Hohlkugel sei homogen, d.h., gleich einer Konstanten $c > 0$. Berechnen Sie die Gravitationskraft F, die auf eine Massenpunkt p mit Masse m in der Kugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < r\}$ wirkt.

2. Betrachten Sie nun eine Kugeloberfläche $O := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R\}$ für einen Radius $R > 0$. Die Kugeloberfläche O ist negativ geladen mit homogener elektrischer Ladungsdichte ρ. Wie kann man den ersten Aufgabenteil verwenden, um mit einer Grenzwertbetrachtung die Coulomb-Kraft, die auf eine elektrische Ladung q im Punkt p in der Kugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R\}$ wirkt, zu bestimmen?

Abgabe: Montag, den 01.12.2014, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.