Übungen zur Mathematik für Ingenieure III

Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Die vier Kurven $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $i = 1,2,3,4$, seien gegeben durch

$$\gamma_1(t) = (1+t, 0)^T \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = (2\cos(\pi t/2), 2\sin(\pi t/2))^T$$

sowie

$$\gamma_3(t) = (0, 2-t)^T \quad \text{und} \quad \gamma_4(t) = (\cos(\pi t/2), \sin(\pi t/2))^T.$$

Ferner sei $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4^-$, und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $F(x,y) = ((x^2+y^2)^{3/2}, y\ln(\sqrt{x^2+y^2}))^T$.
Berechnen Sie das vektoriellen Kurvenintegrale $\int_\gamma F \cdot ds$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = (2xz + 3x^2y^2 + yz\,,\, 2x^3y + xz\,,\, x^2 + xy)^T.$$

Entscheiden Sie, ob es sich bei F um ein konservatives Vektorfeld handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls das Potenzial von F.

Aufgabe 3 ($1+2+1 = 4$ Punkte)
Sei A die durch die Kurven $x^2 - y^2 = 1$ und $x = 4$ beschränkte Fläche.

1. Skizzieren Sie A. Um welche Art eines Flächenstücks handelt es sich?
2. Parametrisieren Sie A durch eine im Gegenuhrzeigersinn verlaufende Kurve γ. Geben Sie in den Zeitpunkten t, in denen γ differenzierbar ist, die Tangentialvektoren $\gamma'(t)$ und die Normalenvektoren $n_A(\gamma(t))$ an.
3. Wie können Sie vorgehen, wenn Sie an Stelle von A die durch die Kurven $xy = 1/2$ und $x + y = 2\sqrt{2}$ beschränkte Fläche B behandeln sollen?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Betrachten Sie die beiden Vektorfelder $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$, gegeben durch

$$F_1(x,y,z) = (-\sin(x)\sinh(y)\,,\, \cosh(y)z^2\,,\, \cos(x)z)^T$$

und

$$F_2(x,y,z) = (\cosh(x)y + (x+z^2)^{-1}\,,\, \sinh(x)\,,\, 2z(x+z^2)^{-1})^T.$$

Entscheiden Sie, ob es sich bei F_1, F_2 um konservative Vektorfelder handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls die dazugehörigen Potenziale.

Aufgabe 5 (**$*$-Aufgabe;** $2 + 2 = 4$ **Punkte)**
Die zweimal stetig differenzierbare Kurve $\sigma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ sei nach Bogenlänge parametrisiert. Für alle $s \in [0, L]$ mit $\sigma''(s) \neq 0$ definieren wir den *Hauptnormalenvektor* $n(s)$ und den Krümmungsradius $r(s)$ durch

$$n(s) := \frac{\sigma''(s)}{\|\sigma''(s)\|} \quad \text{und} \quad r(s) := \frac{1}{\|\sigma''(s)\|}$$

1. Zeigen Sie, dass der Hauptnormalenvektor $n(s)$ immer senkrecht auf dem Tangentialvektor $\sigma'(s)$ steht.

2. Berechnen Sie für einen Kreis K mit Radius R und eine Ellipse

   $$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$$

   mit Halbachsen der Längen a und b die Krümmungsradien in den Randpunkten.

Abgabe: Mittwoch, den 7.1.2015, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.