Übungen zur Mathematik für Ingenieure III

Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Blatt 9

Aufgabe 1 ($2+2=4$ Punkte)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion sowie $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld.

1. Beweisen Sie die in der Vorlesung mit Hilfe des Nabla-Kalküls symbolisch hergeleiteten Identitäten

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

2. Beweisen Sie die Identität $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \Delta F$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $R > 0$, und sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \,,\; z \geq 0\}$$

die obere Halbsphäre im $\mathbb{R}^3$, versehen mit vom Nullpunkt wegweisenden Normalenvektoren. Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch $F(x, y, z) = (y, 2z, 3x)$ gegeben.
Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot} F$ von F und das Flächenintegral $\int_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 3 ($1+3=4$ Punkte)
Gegeben sei die Fläche

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4 \,,\; z = 8 - (x^2 + y^2)^{3/2}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (y^3, 0, 0)^T$.

1. Skizzieren Sie die Fläche S.

2. Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das vektorielle Flächenintegral $\int_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma$; dabei sei die Orientierung von S durch das Normalenfeld gegeben, dessen Normalenvektoren zur z-Achse weisen.

Aufgabe 4 (4 **Punkte)**
Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto \|x\|^{-\alpha}.$$

Berechnen Sie Δf. Für welche Werte von n und α ist f eine harmonische Funktion, d.h., wann gilt $\Delta f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?

Abgabe: Montag, den 26.1.2015, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax.