Mathematatik für Ingenieure III

Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. M. Gnewuch
Dr. S. Buschenhenke

Probeklausur

Aufgabe 1 ($1+1+1+1+1=5$ **Punkte**)
Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort auf nachvollziehbare Art und Weise.

1. Wende auf eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die (aktive) Koordinatentransformation $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto z+Tx$ mit festen $z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ und $T = \lambda E_n$, E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix, an. Dann gilt $\ell(\varphi(\gamma)) = \lambda^n \ell(\gamma)$.

2. Das Flächenstück $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x+y| \leq 1\}$ ist einfach glatt berandet.

3. Das Flächenstück $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$ ist einfach glatt berandet.

4. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld und $\gamma : [0,l] \to U$ eine geschlossene, stetig differenzierbare Kurve, die ein Standardflächenstück A umschließt. Für $p \in \partial A$ sei $n(p)$ der nach außen gerichtete Normalenvektor in p. Ist F ein Potentialfeld, so gilt $\oint_\gamma F(s) \cdot n(s)\, ds = 0$.

5. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ absolut Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$, so gilt dies auch für die Funktion $\sqrt{|f|}$.

Aufgabe 2 (2 **Punkte**)
Seien $R > 0$ und

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, -1 \leq z \leq 2 \, , \, (x-z)^2 + (y-z)^2 \leq zR\}.$$

Berechnen Sie das Volumen von M unter Nutzung des Cavalierischen Prinzips.

Aufgabe 3 ($2+2+2=6$ **Punkte**)

1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,1]^3} x \sin(y+z)\, d(x,y,z).$$

2. Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq 1 \, , \, 0 \leq y \leq x^2\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den geometrischen Schwerpunkt von D.

3. Seien $r,h > 0$ und $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \leq z \leq h \, , \, x^2+y^2 \leq r^2\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_M x^2 z\, d(x,y,z).$$

Aufgabe 4 $(1+2=3$ **Punkte)**
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt \quad \text{und} \quad g(x) = \int_2^4 \frac{e^{xt^2}}{t}\, dt.$$

1. Warum ist die bei der Definition von f auftretende Funktion $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion?

2. Berechnen Sie die Ableitungen von f und g.

Aufgabe 5 $(3+1+1+2=7$ **Punkte)**
Seien $U := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (1,\infty)$ und

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3\,,\ (r,\phi,c) \mapsto (cr\cos(\phi), cr\sin(\phi), \sqrt{c^2-1}).$$

1. Überprüfen Sie, dass φ eine Koordinatentransformation ist und bestimmen Sie das Bild $\varphi(U)$ von U unter φ.

2. Berechnen Sie die Jacobische Funktionaldeterminante $\det(\varphi'(r,\phi,c))$ von φ.

3. Sei

   $$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le z \le 2\,,\, 0 \le x, y\,,\, (1+z^2) \le x^2+y^2 \le 2(1+z^2)\}.$$

   Beschreiben Sie die Menge $A := \varphi^{-1}(H)$ als Teilmenge von U mit Hilfe der Koordinaten (r,ϕ,c).

4. Berechnen Sie das Integral $\int_H xz\, d(x,y,z)$.

Aufgabe 6 $(3+2+2=7$ **Punkte)**
Sei $a > 0$. Die Kardioide ist die durch $\gamma(\phi) = (a(1+\cos(\phi)), \phi)$ für $|\phi| \le \pi$ in Polarkoordinaten gegebene Kurve.

1. Berechnen Sie die Länge $\ell(\gamma)$ von γ.

2. Berechnen Sie das skalare Kurvenintegral $\int_\gamma |y|\, ds$, wobei der Integrand in Cartesischen Koordinaten gegeben ist.

3. Berechnen Sie das vektorielle Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot ds$ für das in Cartesischen Koordinaten gegebene Vektorfeld $F(x,y) := (x,y)^T$.

Aufgabe 7 $(2 + 3 + 2 = 7$ **Punkte)**
Sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \left(y \sin(x) - x \cos(y) \,,\, \frac{x^2}{2} \sin(y) - \cos(x) + \cos(y) \right)^T .$$

1. Überprüfen Sie mit Hilfe des Potentialkriteriums, dass F ein Potentialfeld ist.

2. Berechnen Sie ein Potential von F.

3. Sei $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) := \left(t \sin(t) \,,\, t + t(t - \pi/2) \tan\left(\frac{\pi}{4 + t^2} \right) \right)$$

   für alle t. Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F(s) \cdot ds$.

Aufgabe 8 $(1 + 3 = 4$ **Punkte)**
Die Lemniskate L wird defniert durch die in Polarkoordinaten gegebene Gleichung $r^2 = \cos(2\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

1. Parametrisieren sie die Lemniskate durch eine im Gegenuhrzeigersinn laufende Kurve γ.

2. Berechnen Sie die Fläche der durch die Lemniskate umschlossenen Fläche.

Die Bearbeitung der Probeklausur ist freiwillig. Um die volle Punktzahl zu erzielen, reicht es bei einer Aufgabe nicht aus, nur das richtige Ergebnis anzugeben, sondern die angeführten Rechnungen und Argumente müssen klar verständlich und nachvollziehbar sein. Wenn Sie Ihre Aufgabenlösungen korrigiert haben möchten, so geben Sie Ihre Bearbeitung bitte am Montag, den 12.1.2015, vor Beginn der Vorlesung im Hörsaal F des Audimax ab.